Pensamiento Educativo. Vol. 27 (diciembre 2000), pp. 195-223

"CONTEXTO" Y "MAGNITUDES" EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

Marianna Bosch Casabò[1]
Enid Vargas Norambuena[2]

Resumen

El trabajo que presentamos muestra cómo el análisis didáctico que propone la Teoría Antropológica elaborada por Yves Chevallard permite reformular tanto el análisis *a priori*, como la interpretación de los resultados de una investigación previa sobre el "razonamiento intuitivo sobre probabilidad". En lugar de considerar la variable "contexto" en el que se formula un problema (variable de naturaleza extramatemática), la modelización de la actividad matemática que propone el enfoque antropológico nos permite poner en evidencia otra variable de naturaleza matemática –el "tipo de magnitud considerada"– que parece condicionar mucho más fuertemente las estrategias y técnicas utilizadas en la resolución de un determinado tipo de problemas de probabilidad.

Abstract

The presented work shows how the didactical approach of the Theoretical Anthropology, proposed by Yves Chevallard, permits to reformulate the analysis and the interpretations of a previous study about "Intuitive Razoning about Probability".

Instead of considering the variable "content" in which the problem was stated (variable of non-mathematical type), the anthropological approach describes the modelling of mathematical activities by stressing the importance of the variable "kind of considered magnitude" (variable of mathematical type), which seems to build a stronger base for the analysis of strategies and methods used to solve problems related to probaility.

1 Universidad Ramón Llull de Barcelona, España - mbosch@fundemi.com
2 Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile - enidvargas@hotmail.com

1. Introducción

En este artículo presentamos un trabajo realizado dentro del marco de la Teoría Antropológica en Didáctica, cuyo objetivo es ilustrar, a partir de una investigación sobre el “razonamiento intuitivo sobre probabilidad”, la importancia del análisis matemático *a priori* de las situaciones propuestas en las investigaciones en didáctica.

Toda investigación didáctica asume, más o menos explícitamente, una determinada manera de describir y entender la actividad matemática y sus componentes. Este “modelo” del conocimiento matemático influye en el tipo de variables que se consideran a la hora de describir y explicar las condiciones de realización, por parte de los alumnos o, incluso, de los profesores, de las actividades matemáticas que la didáctica se propone estudiar. En el ámbito de la educación matemática predomina una visión “cognitivista” de la actividad matemática, derivada de la psicología, que tiende a privilegiar las variables relacionadas con el sujeto que hace matemáticas y, en particular, con su actividad “mental”: el “razonamiento”, la “aprehensión de la situación”, las “concepciones” o “ideas previas” de los alumnos, sus “dificultades”, etc. En contraposición, la investigación en didáctica de las matemáticas que toma sus orígenes en los trabajos de Guy Brousseau (1986) conduciría a anteponer, en el desarrollo metodológico del análisis, las “variables matemáticas” de la situación o actividad que se realiza. El objetivo de la didáctica no es estudiar a los sujetos que enseñan y aprenden matemáticas, sino la actividad matemática que realizan juntos y, en particular, las situaciones que condicionan y posibilitan dicha actividad[3].

Dentro del programa de investigación en didáctica de las matemáticas iniciado por Brousseau, la Teoría Antropológica de Yves Chevallard, en la que se inscribe nuestro trabajo, propone un modelo general de descripción del saber matemático, en términos de praxeo-

3 Ver, sobre este tema, Bosch y Chevallard (1998).

logías matemáticas formadas por tipos de problemas, tipos de técnicas, tecnologías y teorías[4]. Mostraremos, en este artículo, una utilización puntual de este modelo general para el caso de la resolución de un tipo elemental de problemas de probabilidad. Su comprensión no requiere un conocimiento previo de la teoría. Nuestra intención es, a la inversa, facilitar el acceso a la metodología de análisis de la Teoría Antropológica –o, cuanto menos, a su "espíritu de análisis"–, así como ilustrar, mediante un estudio de caso muy concreto y sencillo, la pertinencia y el interés de su utilización.

El estudio que presentamos a continuación parte de una investigación de Silvette Maury (1984) sobre la "cuantificación de las probabilidades" por alumnos que no habían recibido ninguna enseñanza previa de probabilidad. Examinaremos, de esta investigación, el análisis *a priori* y los resultados de un cuestionario que se pasó a alumnos de 15-16 años con un conjunto de problemas en los que se tenía que elegir entre dos juegos de azar (dos ruletas o dos sacos de bolitas) para que la posibilidad de ganar fuera mayor[5].

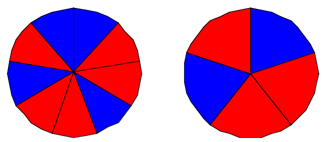
2. La influencia del "Contexto": Maury (1984)

En su investigación, Maury realizó una experiencia con 180 alumnos de 15-16 años, que no habían recibido enseñanza sobre probabilidad. Les propuso un cuestionario con 6 problemas en los que se presentaban dos sacos de bolitas o dos ruletas y se preguntaba en cuál de las dos ruletas o los dos sacos había más probabilidad de sacar un determinado resultado ("rojo" o "azul"). Cada alumno recibía un cuestionario con preguntas referentes a uno solo de los dos "contextos": sacos o ruletas. En el primer problema del cuestionario, sólo se presenta una ruleta o un saco y, una vez descrito el experimento (hacer girar la ruleta o sacar una bolita del saco sin mirar), se pregunta qué resultado es el más probable.

4 Ver Chevallard, Bosch y Gascón (1997), Chevallard (1997 y 1999).
5 Ver Maury (1984 y 1987).

Ejemplo de problemas con los dos contextos:

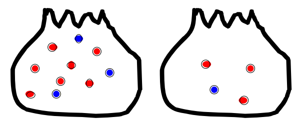
¿En qué caso es más probable sacar rojo?



Caso 1 **Caso 2**

R = 5, A = 4 R = 3, A = 2

¿En qué caso es más probable sacar rojo?



Caso 1 **Caso 2**

R = 7, A = 3 R = 3, A = 1

Los problemas del cuestionario de Maury se pueden resumir en la siguiente tabla, donde los números indican la cantidad de sectores o de bolitas de cada color:

Rojo: Azul	*Probl. 1*	*Probl. 2*	*Probl. 3*	*Probl. 4*	*Probl. 5*	*Probl. 6*
Caso 1	3 : 5	4 : 1	6 : 4	1 : 4	9 : 3	2 : 4
Caso 2		3 : 1	3 : 2	3 : 6	6 : 2	4 : 9

Uno de los objetivos de la investigación de Maury era mostrar “la influencia del “contexto” en la resolución de problemas de probabilidad matemáticamente equivalentes”. Comenta, en relación a esta “variable cognitiva”[6]:

> En lo que se refiere al contexto, la pertinencia de esta variable ha sido puesta en evidencia múltiples veces: varios autores (por ejemplo: Kahneman 1982, Longeot, Fuzelier y Roulin 1982) han mostrado en efecto que *problemas isomorfos desde el punto de vista de la estructura* pueden dar lugar, según el contexto elegido para presentarlos, a dificultades diferentes, a *procedimientos de resolución variados*, más o menos generalizables, según el caso.

[6] Maury, 1984, p. 190, el destacado es nuestro.

Nuestro propósito aquí es mostrar que, en experiencias del tipo propuesto por Maury, las variaciones en las estrategias de resolución utilizadas por los alumnos no están tan ligadas a la variable cognitiva denominada “contexto” que aparece en cada situación (ruletas o sacos de bolitas), como a una variable *de origen matemático* vinculada al tipo de magnitud de cada situación. Dicho en otras palabras, considerar la variable matemática “tipo de magnitud” permite explicar mejor las estrategias seguidas por los alumnos que la variable, más genérica, “tipo de contexto”. La consideración de esta nueva variable nos conducirá, además, a cuestionar la afirmación de la “equivalencia matemática” entre los tipos de problemas planteados a los alumnos.

Volviendo al trabajo de Maury, el análisis de los resultados que se propone clasifica las respuestas en tres tipos (correcta, mixta, errónea) y especifica el argumento utilizado por los alumnos, obteniendo la siguiente conclusión general:

> Hemos puesto en evidencia el impacto del contexto utilizado en los enunciados de los ejercicios (dos modalidades: bolitas y ruletas) sobre la argumentación desarrollada por los sujetos. Este impacto es muy nítido, tanto en los argumentos pertinentes como en los argumentos no pertinentes. Esto pone de manifiesto que problemas equivalentes desde un punto de vista probabilístico no lo son forzosamente en el plano cognitivo, y permite también pensar que los alumnos disponen de varios modelos probabilísticos espontáneos, cuya movilización depende, entre otros, del contexto [...].

En su análisis *a priori*, Maury clasifica las respuestas aportadas en 7 categorías –independientemente de si son correctas o incorrectas–, denominándolas “argumentos justificativos”. Los describimos a continuación siguiendo el orden, abreviación y ejemplificaciones utilizadas por ella en su presentación:

1. *Argumentos pertinentes*

Argumento Area (A): este argumento sólo es utilizado con el contexto “ruletas” y consiste en comparar áreas azules o rojas. Las ruletas tienen el mismo radio, por lo que son consideradas, por los estudiantes, como “un mismo total”. De esta manera realizan una comparación directa.

Un ejemplo de Maury para este argumento es:

Ejercicio 4, evento: sacar azul.

Respuesta de LAU: yo elegiría R_2, porque el área azul es más importante y la aguja tiene más posibilidades de pararse encima.

Argumento Casos favorables/ Casos posibles (P): este argumento consiste en estimar la probabilidad de aparición de un color por la relación entre casos favorables y los casos posibles, determinando previamente una unidad común de medida, que permita la utilización de un procedimiento de comparación de frecuencias absolutas.

Un ejemplo de Maury para este argumento es:

Ejercicio 3, evento: sacar rojo.

Respuesta de FRA: Las posibilidades son iguales. R_1 está dividida en 10 partes (4 azules y 6 rojas). R_2 está dividida en 5 partes (2 azules y 3 rojas). Entonces para las dos hay 4 posibilidades de 10 para las azules y 6 posibilidades de 10 para las rojas.

Argumento Casos favorables/Casos desfavorables (P´): este argumento consiste en estimar la probabilidad de un color estableciendo la relación entre el número de casos favorables y casos desfavorables, a través de la comparación por cociente.

Un ejemplo de Maury para este argumento es:

Ejercicio 3, evento: sacar rojo.

Respuesta de CHA: a priori, no sé. Entonces calcularé la relación entre las bolas rojas y azules en cada saco y tomaré la más grande S_1= 6/4=1,5 S_2=3/2=1,5

Las relaciones son iguales, hay las mismas posibilidades en los dos sacos.

Argumento Comparación implícita de razones (B): este argumento consiste en determinar la probabilidad de un color realizando una comparación implícita de razones sin utilizar cuantificaciones. Es un tipo de argumentación P’, pero sin cuantificar.

Un ejemplo de Maury para este argumento es:

Ejercicio 3, evento: sacar rojo.

Respuesta de LAU: los dos sacos son equivalentes por su número de bolas, pero yo escogería S_1 dado que hay dos bolas rojas de más respecto a las azules.

2. *Argumentos no pertinentes*

Argumento Reparto (R): este argumento se relaciona con la influencia de la dispersión o distribución espacial de los colores en las respuestas de los estudiantes. Así, en el caso de las ruletas, se referiría a la distribución de los sectores circulares en la ruleta y, en el caso de los sacos de bolitas, a la posición de las bolitas en el saco.

Un ejemplo de Maury para este argumento es:

Ejercicio 3, evento: sacar rojo.

Respuesta de CAU: para que la aguja indique el color rojo, yo escogería la ruleta R_1, porque los 6 sectores rojos están dispersos en la ruleta. Dado que los sectores rojos están espaciados, sólo tres que están más cerca, la aguja tiene más posibilidades de caer encima.

Argumento Diferencia (D): este argumento consiste en determinar la probabilidad de un color, a través de una comparación por diferencia. En cada saco o ruleta, se determina la diferencia entre el número de casos favorables y casos desfavorables (o a la inversa), luego se compararan estas diferencias y se concluye.

Un ejemplo de Maury para este argumento es:

Ejercicio 6, evento: sacar rojo.

Respuesta de COP: para tener más posibilidades de sacar una bola roja, yo elegiría el saco S_2, porque hay 5 bolas rojas de más que las bolas azules, mientras que en el saco S_1 hay 2 de más.

Argumento Casos favorables (N): este tipo de argumento compara únicamente los casos favorables, sin tomar en cuenta los casos posibles y tampoco los casos desfavorables, tanto en ruletas como en sacos de bolitas. En este caso, las ruletas y los sacos de bolitas son considerados como totales diferentes. En las ruletas se considera a cada uno de los sectores circulares que la componen como una parte de ésta, por lo tanto, cada ruleta es “un total diferente”; en el caso de los sacos, éstos contienen diferentes totales de bolitas.

Un ejemplo de Maury para este argumento es:

Ejercicio 4, evento: sacar azul.

Respuesta de COL: yo elegiría el saco S_2, porque tiene más bolas azules que en el saco S_1, entonces hay más posibilidades de extraer una azul.

Maury presenta los resultados obtenidos mediante tablas en las que aparece el número de respuestas para cada uno de los tipos de argumentos descritos en su análisis.

TABLA CON LAS RESPUESTAS CORRECTAS

	P	P’	A	B	Total correctas
Ruletas	32	5	8	2	47
Sacos	11	38	0	20	69
Total	43	43	8	22	116

TABLA CON LAS RESPUESTAS MIXTAS

	P	P’	A	B	Total mixtas
Ruletas	3	0	17	0	20
Sacos	2	12	0	5	19
Total	5	12	17	5	39

A partir de los datos obtenidos, Maury concluye que “los alumnos disponen de varios modelos probabilistas espontáneos, cuya movilización depende, entre otros, del contexto." Destacaremos aquí tres de sus principales conclusiones:

(1) Las ruletas favorecen significativamente, más que las bolitas, la utilización repetida de un mismo procedimiento en ejercicios de cuantificación.

(2) Las ruletas favorecen la utilización de procedimientos en los cuales los alumnos no explicitan información numérica.

(3) Las bolitas favorecen una formalización más elevada de los problemas (utilización sistemática de procedimientos numéricos) y un recurso mayor a procedimientos que parecen reflejar una mejor adaptación a la situación.

3. Propuesta de un nuevo análisis *a priori*

Hemos dicho anteriormente que la Teoría Antrópológica propone una descripción de la actividad matemática en términos de "praxeologías" compuestas por tipos de problemas y tipos de técnicas (que conforman la "praxis" o "saber-hacer" de la actividad) y por tecnologías y teorías (que conforman el "logos" o el "saber" matemático local propiamente dicho). Una vez ubicados en el marco de esta teoría, nos planteamos describir la experiencia propuesta por Maury detallando los *tipos de problemas* planteados y los *tipos de técnicas* utilizados por los alumnos, en un intento de aproximarnos a la descripción de la "praxeología matemática puntual" que conformaba la experiencia. De nuestro análisis surgieron básicamente dos tipos de problemas y dos tipos de técnicas que presentaremos a continuación, con algunos ejemplos de respuestas que permitirán clarificarlos y diferenciarlos:

(a) Tipos de problemas

Tal como estaban formuladas las preguntas, podemos considerar que el cuestionario de Maury plantea dos grandes tipos de problemas[7], en función de si se requiere la elección del suceso más probable (sacar rojo (R) o azul (A)) o de si se requiere, dado un suceso (sacar rojo), elegir el tipo de juego (entre dos ruletas o entre dos sacos de bolitas) que más lo favorece. Podemos enunciar los dos tipos de problemas como sigue:

> **P_1:** Dada una ruleta o un saco, decidir qué suceso es más probable: “sacar rojo” o “sacar azul”.
> **P_2:** Dados dos sacos o dos ruletas, decidir en qué saco o ruleta es más probable sacar rojo.

NOTA: utilizaremos las siguientes abreviaciones:

$P(R) > P(A)$ como abreviación de “es más probable sacar Rojo que Azul”.

$P(R_1) > P(R_2)$ como abreviación de “es más probable sacar Rojo en el primer caso que en el segundo”.

$P(R) \gtrless P(A) \Leftrightarrow r \gtrless a$ como abreviación de “la probabilidad de sacar rojo es mayor (respectivamente menor) que la probabilidad de sacar azul porque *r* es mayor (respectivamente menor) que *a”*.

En general, ***r*** y ***a*** serán cantidades relativas a tres magnitudes distintas: área de rojo o azul en la ruleta, número de sectores rojos o azules en la ruleta, número de bolitas rojas o azules en el saco.

$P(R_1) \gtrless P(R_2) \Leftrightarrow r_1 \gtrless r_2$ como abreviación de “la probabilidad de sacar rojo en el primer caso es mayor (respectivamente menor) que la probabilidad de sacar rojo en el segundo caso, porque r_1 es mayor (respectivamente menor) que r_2”

[7] La delimitación y definición de los tipos de problemas que componen una organización matemática dada es siempre provisional y constituye en sí misma una cuestión permanentemente abierta. De hecho, sería mejor hablar aquí de “tipos de tareas o cuestiones problemáticas”, es decir, de cuestiones que se nos plantean y que no sabemos responder. Una vez iniciado el estudio de estas cuestiones, serán las técnicas que utilicemos para su resolución las que nos permitirán ir delimitando los distintos tipos de problemas. Veremos más adelante que, en el caso considerado, aparecerán distintos tipos de problemas según las magnitudes que se consideren como pertinentes en una primera modelización de la situación planteada.

En consecuencia, los dos tipos de problemas pueden abreviarse como sigue:

> **P_1:** Dada una ruleta o un saco, decidir si $P(R) > P(A)$ o $P(A) > P(R)$.
> **P_2:** Dados dos sacos o dos ruletas, decidir si $P(R_1) > P(R_2)$ o $P(R_2) > P(R_1)$

(b) Tipos de técnicas

Después de un examen exploratorio de las distintas respuestas de los alumnos, hemos podido destacar dos grandes técnicas que presentan, cada una, distintas variantes:

> τ_1: La relación $P(R) > P(A)$ o $P(R_1) > P(R_2)$ se decide comparando **frecuencias absolutas**: $R > A$ o $R_1 > R_2$

En esta técnica se trabaja únicamente con cantidades de magnitudes: área roja o azul de la ruleta, número de sectores de la ruleta, número de bolitas del saco.

Ejemplos de respuestas de los alumnos con los distintos contextos:

Una ruleta:
"rojo, porque hay más partes rojas"
"siempre rojo, porque hay un cuadrado más de color rojo"
"rojo porque hay 5 rojos y sólo 2 azules"
Dos ruletas:
"cualquiera, porque si uno junta las rojas da la misma cantidad"
"la Nº1, porque hay más rojo"
Dos sacos de bolitas:
"en la primera, porque hay más bolitas rojas"
"en la primera, porque hay menos bolitas y menos azules"

τ_2: La relación $P(R_1) > P(R_2)$ se decide comparando **frecuencias relativas**: $R_1/T_1 > R_2/T_2$ o $R_1/A_1 > R_2/A_2$

En esta técnica se trabaja con *razones de cantidades,* comparando r_1/a_1 con r_2/a_2, o r_1/t_1 con r_2/t_2, siendo r, a, t las cantidades de rojo, azul y total respectivamente (áreas, números de sectores o números de bolitas).

Señalemos aquí que la técnica τ_1 es un caso particular de la técnica τ_2, cuando los totales de sectores o bolitas son iguales: $t_1 = t_2$.

Ejemplos de respuestas de los alumnos con los distintos contextos:

Dos ruletas:

en cualquiera de las dos, porque las dos equivalen lo mismo de bolitas pintada, lo único que en las dos hay la misma probabilidad, porque convirtiéndolas a fracción son equivalentes"

"ambas ruletas pueden ser, ya que al compararlas tienen equivalencia"

Dos sacos de bolitas:

"a tiene 10 para 6 pintadas, la otra tiene 5 y 3 pintadas, entonces es el doble, así que da lo mismo"

"son las mismas probabilidades, porque en una hay 6 de 10 oportunidades y en la otra 3 de 5, 3/5 = 6/10"

"en la primera, porque expresadas en fracción representa más la primera que la segunda".

Una ruleta[8]:

"rojo, porque la 3º parte es roja y sólo la 2º parte es azul; entonces, entre 3/5 y 2/5 es más probable el 3/5 que corresponde al rojo, debido a que hay mayor cantidad del color indicado"

"están iguales, porque la mitad del círculo es rojo y la otra mitad es azul"

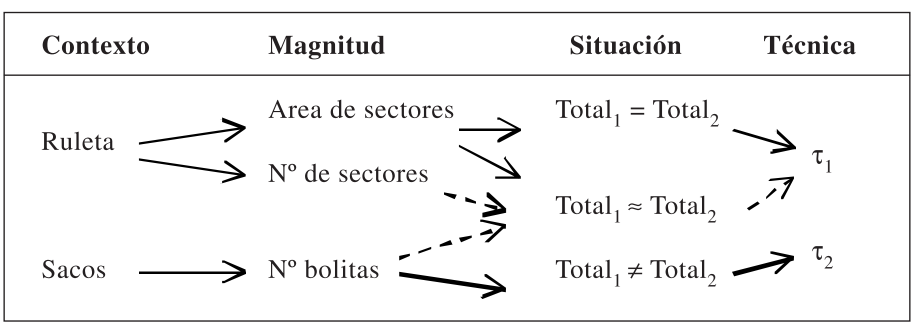
---

[8] Sería más coherente considerar que todas las respuestas a los problemas con una sola ruleta (tipo P1) corresponden a la técnica 1, puesto que, al haber una sola ruleta, la comparación se hace siempre con fracciones con igual denominador. Sin embargo, hemos considerado aquí que estas respuestas corresponden a t_2 puesto que conllevan la idea de comparación de razones. Se trataría pues de las respuestas "más cercanas" a la técnica 2.

(c) Relación entre técnicas y "contextos"

Hemos dicho que Maury (1984) distinguía en su trabajo dos tipos de "contextos" que le permitían establecer una primera clasificación de los problemas planteados en el cuestionario: el contexto "ruletas" y el contexto "sacos de bolitas". Dado que nosotros, en lugar de destacar los contextos, hemos puesto el énfasis en el tipo de técnica utilizada (comparación de cantidades o comparación de razones de cantidades), lo importante no será el contexto, sino el tipo de magnitud que se considera en cada situación. En efecto, los problemas planteados con ruletas pueden ser tratados con la misma técnica que los problemas planteados con sacos de bolitas, siempre que la magnitud considerada no sea el área, sino el número de sectores de un determinado color. A la inversa, si en el caso de las ruletas se toma como magnitud el área total de un color, entonces se puede establecer la comparación entre cantidades y no es necesaria la consideración de razones de cantidades (el área total es la misma en las dos ruletas).

La siguiente tabla muestra la relación entre las magnitudes involucradas en cada situación y el tipo de técnica que mejor permite la resolución del problema:



NOTA: Hemos indicado con trazo continuo las relaciones que creemos más inmediatas y con trazo discontinuo las relaciones posibles, pero que prevemos menos frecuentes. Cada uno de los posibles recorridos daría lugar a una variante de las técnicas 1 y 2.

4. Formulación y contraste de una hipótesis alternativa

De la tabla anterior que propone una relación *a priori* entre "contextos", magnitudes y tipo de técnica, se desprende una clara dependencia entre contextos y técnicas. Podemos formular esta hipótesis en los términos siguientes:

> *Hipótesis:* El tipo de técnica utilizada depende del contexto (ruleta, bolitas) en el que se plantea el problema. No estaríamos, pues, ante un único tipo de problema matemático planteado con dos contextos diferentes, sino de dos tipos de problemas no equivalentes, en lo que se refiere a la técnica más adecuada para resolverlos.

Dicho en otras palabras, cuando se considera, como hace Maury, que el problema planteado es el mismo, desde el punto de vista matemático, independientemente del contexto, se está suponiendo una modelización previa del problema que equipara las magnitudes "área del sector", "número de sectores" y "número de bolitas". De ahí que la diferencia en el tratamiento de cada problema se atribuya al "contexto" (objeto no matemático) y no al tipo de magnitud considerada (objeto matemático).

La didáctica de las matemáticas no debe retomar en su análisis *a priori* las equivalencias que se establecen desde las "matemáticas sabias" gracias al hecho de disponer de una teoría unificadora de la probabilidad. Debe, por el contrario, elaborar sus propios análisis y modelos descriptivos de las actividades matemáticas que realizan los alumnos, estableciendo las condiciones concretas de realización y reproducción de la actividad, a partir del contraste de los modelos propuestos con los datos empíricos.

Tomando como referencia los datos obtenidos en el estudio de Maury, hemos creado la tabla que sigue, que presenta una sistematización de los argumentos anteriormente descritos. Tan sólo hemos cambiado su orden de aparición, siguiendo el criterio del "tipo de técnica" a la que corresponde –comparación de frecuencias absolutas y comparación de frecuencias relativas–, e intentando establecer las posibles "equivalencias" entre los argumentos justificativos descritos por Maury y las técnicas que las engloban.

Argumentos (Maury 1984)	Técnicas
AREA (A): ruleta (totales iguales: $T_1 = T_2$) $P(R_1) \lesseqgtr P(R_2) \Leftrightarrow R_1 \lesseqgtr R_2$ **CASOS FAV./ POS.(P):** $P(R_1) \lesseqgtr P(R_2) \Leftrightarrow R_1 / MC \lesseqgtr R_2 / MC$ Con MC medida común de T_1 y T_2 **CASOS FAV. (N):** (totales distintos $T_1 \neq T_{2)}$ $P(R_1) \lesseqgtr P(R_2) \Leftrightarrow R_1 \lesseqgtr R_2$ **REPARTO (R):** [sólo ruletas] Distribución espacial	τ_1 **Comparar** **frecuencias absolutas** **COMPARAR DOS** **CANTIDADES DE UNA** **MISMA MAGNITUD**
CASOS FAV./DESF. (P'): $P(R_1) \lesseqgtr P(R_2) \Leftrightarrow R_1 / A_1 \lesseqgtr R_2 / A_2$ **COMPARACION IMPLICITA DE RAZONES (B):** P' sin cuantificar **DIFERENCIA (D):** $P(R_1) \lesseqgtr (R_2) \Leftrightarrow R_1 - A_1 \lesseqgtr R_2 - A_2$ ***COMENTARIO: No aparece ninguna relación entre las argumentaciones, salvo entre P y P' (comparación de razones)***	τ_2 **Comparar** **frecuencias relativas** **COMPARAR RAZONES DE** **MAGNITUDES** ***COMENTARIO: Se distinguen P y P, porque en P se busca una medida común para poder comparar sólo cantidades, mientras que en P' se comparan razones de cantidades***

Nuestra interpretación de los datos:

Partiremos aquí las tablas presentadas por Maury, en las que aparece el número de respuestas obtenidas para cada uno de los tipos de argumentos descritos en su análisis *a priori* de los datos. Esta información se puede clasificar y ordenar según lo descrito anteriormente, reagrupando los argumentos P y A como relacionados con la técnica 1 (comparación de cantidades) y los argumentos P' y B como relacionados con la técnica 2 (comparación de razones):

Tabla de respuestas correctas y mixtas[9] *entregada en el estudio de Maury:*

	P	P'	A	B	Total
Ruletas	35	5	25	2	67
Sacos	13	50	0	25	88
Total	48	55	25	27	155

Tabla obtenida con la nueva ordenación de los datos, según los tipos de técnicas:

	P	A	P'	B	Total
Ruletas	35	25	5	2	67
Sacos	13	0	50	25	88
Total	48	25	55	27	155

Los argumentos P y A descritos por Maury corresponden a la técnica τ_1 y los argumentos P' y B a la técnica τ_2, según el análisis

9 Las respuestas mixtas son respuestas correctas con argumentaciones no pertinentes.

a priori presentado anteriormente. De ello se obtiene la siguiente tabla:

	Técnica 1	Técnica 2	Total
Ruletas	60	7	67
Sacos	13	75	88
Total	73	82	155

La realización de un test de independencia permite afirmar, a un nivel de significación del 1%, que no son independientes el contexto del problema y el tipo de técnica que se utiliza, cuando las respuestas analizadas son las que se han clasificado como correctas o mixtas. χ^2(calculado) = 55[10].

En el caso de utilizar todas las respuestas (correctas, erróneas y mixtas) los resultados obtenidos son los siguientes:

	Técnica 1	Técnica 2	Total
Ruletas	140	7	147
Sacos	46	117	163
Total	186	124	310

Aquí también se puede afirmar, con un nivel de significación del 1%, que no son independientes el contexto del problema y el tipo de técnica que se utiliza. χ^2(calculado) = 64.

Finalmente, hemos intentado averiguar si hay dependencia entre el tipo de respuestas (correctas, erróneas, mixtas) y el contexto (ruletas, sacos de bolitas):

[10] Teóricamente, con un grado de libertad: χ^2 (leído) = 6,64, con un nivel de significación del 1%.

	Correctas	Erróneas	Mixtas	Total
Ruletas	47	85	20	152
Sacos	69	80	19	168
Total	116	165	39	320

Conclusión: χ^2 (calculado) = 2,9. Este valor no nos permite afirmar, con un nivel de significación de 1%, que el tipo de respuesta obtenida dependa del contexto del problema.

Vemos, pues, que los mismos datos de Maury parecen corroborar nuestro análisis *a priori*, en el sentido de que establecen una clara dependencia entre la utilización de la técnica 1, en los problemas de ruletas y la utilización de la técnica 2, en los problemas de bolitas. La dependencia, pues, no se situaría tanto entre contexto y argumento, sino entre técnica utilizada y tipo de magnitud reconocida (o reconocible).

Maury afirma en la conclusión de su trabajo que "en la resolución de un problema, numerosos factores –distintos de aquellos ligados directamente con la "estructura matemática" del problema– son susceptibles de influenciar los comportamientos de los alumnos; sobre todo cuando los alumnos no dominan completamente esta estructura." Creemos que, en contraposición a su argumento, nuestro análisis permite mostrar que lo que más parece influenciar el comportamiento de los alumnos es precisamente algo tan estrechamente vinculado a la estructura matemática del problema como es el tipo de magnitud que se considera involucrada en la situación considerada: si se trata de áreas, el problema consiste en comparar cantidades; si se trata de sectores o bolitas, el problema se complica, puesto que exige una comparación de razones, es decir, una "comparación de comparaciones".

No queremos ocultar aquí que, como es previsible, Maury sí hace referencia, en sus conclusiones, a la particularidad que distingue las ruletas de los sacos de bolitas y que consiste en el hecho de presentar dos totales iguales. Afirma en efecto lo siguiente:

> Analizando las dos modalidades consideradas para la variable contexto, hemos intentado destacar las características generales que parecen, a la vista de nuestros resultados, tener una influencia sobre la argumentación expresada por los alumnos. [Una de estas características es la] materialización de un "todo" (ruleta) con los sectores (y no con las bolitas) que explicaría la fuerte utilización del argumento "casos favorables/casos posibles" con esta modalidad; mientras que con las bolitas, el argumento "casos favorables/casos desfavorables" resulta ser mayoritario.

Pero, como vemos, a diferencia de nuestro análisis, Maury no distingue, en el caso de las ruletas, y dentro del argumento "casos favorables/casos posibles", el hecho de considerar la magnitud "sector" del hecho de considerar el "área" total de un color. Para nosotros hay aquí una diferencia técnica esencial (corroborada por los datos empíricos) que su análisis no permite poner de manifiesto. En nuestros términos, lo único que se podría decir es que la consideración de sectores en el caso de la ruleta favorece cierta variante de la técnica 2 (utilización de frecuencias relativas respecto al total) frente a otra variante de la técnica 2 (razón de un color respecto a otro).

5. Construcción de un nuevo instrumento

El análisis anterior, realizado con los datos de Maury, nos condujo a plantear las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1. El tipo de técnica utilizada no es independiente del "contexto" en que aparece el problema. Es decir, no hay un único problema matemático presentado con dos contextos diferentes, sino que son dos problemas matemáticamente no-equivalentes, en el sentido de que provocan el recurso a distintos tipos de técnicas.

Hipótesis 2. La técnica 1, por su simplicidad, es dominante a "nivel global". Tanto en problemas de ruletas como en los de sacos de bolitas, las respuestas en su mayoría se basan en la técnica 1 (comparación de frecuencias absolutas).

Hipótesis 3. La técnica 2 es de más difícil aparición. En ruletas su uso es bastante minoritario y en sacos de bolitas es más frecuente, porque la técnica 1 fracasa.

Con el objeto de comprobar empíricamente nuestras hipótesis, construimos un nuevo instrumento, que consta de 6 modelos de cuestionario (A, B, C, D, E, F) con las siguientes características:

- Cada modelo de cuestionario presenta seis problemas de ruletas y/o sacos de bolitas.
- Cada modelo de cuestionario comienza con un problema en el que aparece sólo una ruleta o un saco de bolitas y se pregunta por el caso más favorable, con el objeto de familiarizar a los alumnos con el tipo de problemas, es decir, para comprobar que entienden "en qué consiste el juego".
- Todos los modelos de cuestionarios finalizan con un problema común. En este problema se mezclan los dos "contextos" involucrados, las ruletas y las bolitas, con el objetivo de "presionar" o "forzar" la emergencia de la técnica 2 sobre la técnica 1. Se trata de un problema en el que la técnica 1 no es la más adecuada de usar o es más difícil de aplicar, con lo que permite mostrar hasta qué punto un problema es o no "matemáticamente equivalente a otro" por el hecho de presentar los mismos valores numéricos, o si la diferencia radica en el tipo de técnica que suscita.
- En los modelos A y B se presenta sólo un tipo de contexto, ruletas y bolitas respectivamente, con el objeto de poder analizar con posterioridad, por separado, las respuestas y técnicas utilizadas y también poder comparar los resultados, detectando la utilización mayoritaria de una técnica con un tipo de "contexto". En este caso, lo que pretendemos mostrar es que, en los problemas de ruletas, la técnica 1 se usa mayoritariamente y en

los problemas de bolitas se utiliza más la técnica 2. Aunque globalmente la técnica 1 sea predominante.

– Los modelos restantes (C, D, E, F) resultan de una combinación de los modelos A y B: 2 problemas de ruletas y 2 de bolitas (C) o viceversa (D), ruletas y bolitas alternadas empezando por ruletas (E) y empezando por bolitas (F).

Los seis modelos de cuestionario fueron aplicados a 126 alumnos de 2º de ESO[11] (13-14 años), 1º Bachillerato[12] (16-17 años), 1º año de una diplomatura universitaria en ciencias empresariales (18-20 años). Los estudiantes de 2º de ESO (77 alumnos) y de bachillerato (30 alumnos) no habían recibido enseñanza previa de probabilidad. Los restantes (19 alumnos) habían estudiado probabilidad a nivel básico durante su escolaridad.

Para presentar una visión panorámica sobre el tipo de técnica utilizado en los distintos modelos de cuestionarios (A, B, C, D, E, F), hemos confeccionado una tabla en que aparece el número de respuestas obtenidas en cada uno de ellos.

	A	B	C	D	E	F	Total
τ_1	41	32	54	37	47	23	234
τ_2	20	42	22	16	16	18	134
Total	61	74	76	53	63	41	368

A simple vista se puede apreciar que la técnica 1 es la que predomina a nivel global (64% de las respuestas), lo que parece confirmar la hipótesis 2.

También, con los datos obtenidos, hemos realizado varias pruebas de cruce del modelo de cuestionario y el tipo de técnica aplican-

11 Enseñanza Secundaria Obligatoria. Equivalente a 7º de Educación Básica.
12 Equivalente a Tercero Medio.

do la prueba chi cuadrado, en los distintos escenarios posibles. Para evitar un desarrollo demasiado extenso nos limitaremos a entregar los resultados de los cálculos y a comentarlos. Presentaremos los que, a nuestro juicio, son más interesantes, porque aportan información relevante para este estudio y permiten verificar nuestras hipótesis.

- Tomando en consideración todos los datos obtenidos con los 6 modelos de cuestionario, se obtiene un χ^2 (calculado) = 20,6 (con 5 grados de libertad)[13], por lo que podemos concluir, con un nivel de significación del 1%, que, en general, hay dependencia entre el tipo de cuestionario y las técnicas que se utilizan para resolver los problemas planteados.
- En el caso de cruzar los cuestionarios A y B con los dos tipos de técnicas, se obtiene un χ^2 (calculado) = 7,74 (con 1 grado de libertad) lo que nos permite también afirmar, con un nivel de significación de un 1%, que se refleja una dependencia entre los modelos de cuestionarios A y B y los tipos de técnicas.
- Si se consideran los datos de 2º de ESO para todos los modelos de cuestionarios, se obtiene un χ^2 (calculado) = 12,1 (con 5 grados de libertad)[14], con lo que se puede señalar, aunque sólo con un nivel de significación del 5%, que existe dependencia entre los modelos de cuestionarios y las técnicas.
- En el caso de cruzar los alumnos de bachillerato con todos los modelos de cuestionario, se obtiene un χ^2 (calculado)= 16,2 (con 5 grados de libertad), con lo que podemos concluir dependencia entre variables con un 1% de significación.
- Los datos obtenidos de los alumnos de 1º año de una carrera universitaria y que habían estudiado probabilidades en la escue-

---

[13] Teóricamente con 5 grados de libertad χ^2 (leído) = 15,06 con un nivel de significación del 1%.

[14] Teóricamente con 5 grados de libertad χ^2 (leído) = 11,07 con un nivel de significación del 5%.

la son los que se pueden esperar en estos casos, no hay dependencia entre los cuestionarios y los tipos de técnicas, debido a que utilizan mayoritariamente la técnica 2, aprendida durante su época escolar.

– En el caso de agrupar los cuestionarios que más “se parecían” (A con E y B con F) obtenemos lo siguiente:
– Cuando se consideran todos los datos, hemos encontrado nuevamente una dependencia entre las técnicas y los modelos de cuestionarios, χ^2 (calculado) = 13,3 (con 1 grado de libertad), con un 1% de significación.
– En el caso de considerar solamente los datos de los alumnos de 2º ESO, también nos hemos encontrado con una dependencia entre las técnicas y los modelos de cuestionarios, χ^2 (calculado) = 13,3 (con 1 grado de libertad), con un 1% de significación.
– También, hemos agrupado, por un lado, todas las preguntas de ruletas y, por otro, todas las de sacos de bolitas, realizando un “cruce” con las técnicas. El resultado obtenido de este cruce es un χ^2 (calculado) = 23,1 (con 1 grado de libertad), con un 1% de significación, lo que nos permite confirmar por última vez nuestra hipótesis: existe dependencia entre el tipo técnica y los “contextos” de los problemas (ruletas, sacos de bolitas).
– Hemos explicitado anteriormente las razones de incorporación del problema 6 para presionar la emergencia de la técnica 2. Hemos cruzado la técnica utilizada en este problema y los modelos de cuestionarios. El resultado obtenido es de un $\chi^2 = 2{,}91$ con 5 grados de libertad, lo que muestra, como esperábamos, que la utilización de la técnica 2 no parece ser inducida por el tipo de contexto trabajado anteriormente.

6. Proyecciones del trabajo

La investigación de Maury constituye un ejemplo de trabajo inscrito en lo que prodríamos llamar “enfoque cognitivo” de la problemática didáctica[15]. Aun a riesgo de simplificar, podemos considerar que dicho enfoque se propone, dentro de sus principales objetivos, caracterizar los “modelos cognitivos”, activados por los sujetos que son inducidos por los diferentes “contextos” en que aparecen los problemas[16] . El objeto de estudio es, en general, la actividad cognitiva de los sujetos y se sobreentiende que los “contextos” (los “sesgos”) considerados no forman parte del problema matemático estudiado, sino que constituyen, en cierto sentido, su entorno extramatemático. El contexto es considerado como una variable cognitiva, no como una variable matemática.

El análisis que proponemos dentro del enfoque antropológico se preocupa, en cambio, por caracterizar la actividad matemática global de resolución de los problemas, buscando primero en el análisis de las condiciones de posibilidad de esa actividad la explicación de los comportamientos de los alumnos. Más concretamente, con nuestra propuesta de análisis *a priori*, mostramos que el “contexto” de un problema matemático es parte integrante de éste, en el sentido de que modifica el tipo de actividad matemática que se realiza para resolver y, más en general, la praxeología en la que dicho problema toma existencia (sus componentes y las relaciones entre ella). En particular, lo que en un primer nivel de análisis aparece como diferencias de “contexto”, se traduce posteriormente en diferencias al nivel de las magnitudes del problema consideradas, es decir, al nivel de una primera modelización matemática de la situación considerada. De ahí que cada una de estas modelizaciones faciliten la movilización de una técnica más que otra cuando se trata de alumnos en el nivel escolar (2º ESO y Bachillerato), mientras que, en el nivel universitario, la técnica basada en una modelización “más elaborada” y globalizadora (comparación de razones de cantidades) está más naturalizada y emerge mayoritariamente.

---

15 Ver Gascón, 1998.

16 Ver como muestra de investigaciones dentro del enfoque mencionado: Cuadra (1997), Fischbein (1975), Hawkins y Kapadia (1985), Henry (1996), Hogarth (1987), Kahneman y otros (1972 y 1984), Sáenz (1998), Tversky y Kahneman (1973 y 1981).

En síntesis, las conclusiones planteadas por ambos modelos respecto a los problemas de probabilidad presentados pueden resumirse en la tabla siguiente:

Enfoque Cognitivo	Enfoque Antropológico
– Problemas equivalentes desde un punto de vista probabilista no lo son necesariamente en el plano cognitivo. – Lo problemático es la actividad cognitiva inducida por el contexto del problema. – Los alumnos disponen de varios modelos probabilistas espontáneos, cuya movilización depende entre otros del contexto. – En el caso del contexto ruletas, la materialización de un “todo” explica la fuerte utilización del argumento casos favorables/casos posibles.	– El contexto modifica el tipo de actividad matemática, porque forma parte integrante de la actividad. – En un caso (ruleta) se comparan cantidades, en el otro caso (sacos) se comparan razones de cantidades. – Los problemas de probabilidad (escolares) considerados son, de hecho, problemas de comparación de dos cantidades de una misma magnitud. – Aparece aquí un fenómeno de transposición didáctica: la ausencia de un tratamiento matemático de las magnitudes en la secundaria.

El resumen anterior, así como la breve experimentación presentada en este artículo, no debería esconder la complejidad que plantea el tema de la probabilidad elemental para la investigación didáctica. Siguiendo la metodología propia de la Teoría Antropológica, la continuación de nuestra investigación, de la que no hemos presentado aquí más que su momento exploratorio inicial, debería contemplar los puntos siguientes:

(1) Profundizar en el estudio estadístico de los datos obtenidos con el nuevo cuestionario para obtener una caracterización empírica de las técnicas que especificaba nuestro análisis *a priori*.

(2) Describir las organizaciones matemáticas escolares actuales en torno al tema de la probabilidad, poniendo especial énfasis en las consecuencias de *la omisión del tratamiento de las magnitudes en la enseñanza de las matemáticas.* Señalemos al respecto

que, en general, la comunidad didáctica parece seguir la corriente de los matemáticos en su rechazo hacia las magnitudes y dejan a veces de lado variables relacionadas de los problemas con este fenómeno de transposición didáctica[17].

(3) Desarrollar el análisis epistemológico sobre la probabilidad, yendo más allá del "nivel teórico" al que se suelen limitar los estudios epistemológicos clásicos, para caracterizar los tipos de organizaciones matemáticas concretas que se pretenden fundamentar. Esto podría permitir dar respuesta a cuestiones como las siguientes: ¿qué diferencias, no solamente teóricas, sino técnicas y tecnológicas aparecen entre el punto de vista "subjetivista" y el "objetivista" sobre la probabilidad? ¿Y entre el "axiomático" y el "frecuentista"? ¿Hasta qué punto se reflejan estas diferencias en la actividad matemática de los alumnos? Por ejemplo, ¿en qué términos se puede abordar matemáticamente el problema de la disposición de los colores en la ruleta (es decir, el hecho de que dicha disposición no afecta a la probabilidad de sacar un determinado color)?

(4) El estudio epistemológico anterior, realizado con las herramientas de la Teoría Antropológica, debería ser capaz de integrar los aportes de la Teoría de las Situaciones Didácticas en lo que se refiere al estudio de la probabilidad. Sabemos que Brousseau (1993) plantea un modelo tripolar en el que define el cálculo de probabilidades como la teoría que establece un vínculo entre tres dominios:

- la lógica o la mecánica de una máquina de azar,
- lo que es razonable prever de su funcionamiento futuro, y
- la interpretación de resultados (estadísticos) producidos por la máquina en el pasado.

[17] Este fenómeno ya ha sido señalado en otros trabajos y es objeto de estudio en algunas investigaciones del enfoque epistemológico. Ver, por ejemplo, Bosch (1994).

Según esta propuesta, la probabilidad aparecería como una dialéctica entre tres entidades: un proceso estocástico (fenómeno aleatorio), una máquina de azar (que en cierto sentido aparece como una caja negra) y los sucesos observables (el comportamiento estadístico de la máquina de azar). Para Brousseau[18]:

La axiomática de Kolmogorov conduce a los alumnos a interpretar directamente las probabilidades (esas medidas que momentáneamente presentan una apariencia arbitraria) mediante frecuencias; por consiguiente, provoca que los alumnos no sólo no entienden lo que está en juego con la ley de los grandes números, sino que tampoco llegan a entender todas las relaciones entre la teoría, los modelos y la contingencia.

En realidad, la explicación de una estadística mediante un proceso estocástico, la explicación de una probabilidad mediante la consideración de una máquina de azar y la prueba de regularidad de una máquina a través de sus comportamientos estadísticos, constituyen los tres polos de una dialéctica que es el verdadero motor epistemológico de esa extraña parte de las matemáticas.

De esta forma, Brousseau explica que la probabilidad no es únicamente el producto de un estudio estadístico de la ocurrencia de un evento aleatorio en pruebas repetidas, ni tampoco un proceso de conjeturar basado en una anticipación correcta (probabilidad *a priori*), sino que incluye los dos en la dialéctica anteriormente mencionada.

(5) Finalmente, el análisis epistemológico mencionado debería contrastarse mediante la construcción (o propuesta) de nuevas organizaciones matemáticas y didácticas en torno al tema de la estadística y la probabilidad a nivel de la escolaridad obligatoria. Estas organizaciones son necesarias para poder observar y describir las organizaciones actualmente existentes, pero también para poder analizar las restricciones matemáticas, epistemológicas y didácticas que pesan sobre ellas.

---

[18] Brousseau (1993).

Referencias Bibliográficas

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona (no publicada).

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19/1, 77-124.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 33-115.

Brousseau, G. (1993). *Stratégies de l'analyse statistique*. Publications du LADIST. Université Bordeaux I.

Cuadra, V. (1997), *Razonamientos intuitivos de los niños a los 13-14 años de edad sobre probabilidades*. Tesis de Magíster, Universidad Católica de Valparaíso (no publicada).

Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

Espinoza, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función". Del "pensamiento del profesor" a la gestión de los momentos de estudio*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona (no publicada).

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel publishing company.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1, 7-34.

Gras, R., Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en didactique des mathématiques*, 15/1, 49-95.

Hawkins, A.; Kapadia, R. (1985). Children's conceptions of probability –a psychological and pedagogical review. *Education Studies in mathematics,* 15, 349-376.

Henry, A.; Henry, H. (1996). Enfoque frecuentativo de probabilidades en los programas franceses dirigidos a alumnos entre 16 y18 años, *Enseñanza de las matemáticas: relación entre saberes, programas y prácticas*, 89-108. Topiques éditions (Francia).

Hogarth, R. M. (1987). *Judgement and choice the psychology of decision*. Wiley, Chichester.

Kahneman, D.; Slovic, P.; Tversky, A. (Eds.) (1984). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases.* New York: Cambridge University Press.

Kahneman, D.; Tversky, A. (1972). Subjective probability: a judgment on representativeness. *Cognitive Psychology*, 3, 430-454.

Maury, S. (1984). La quantification des probabilités: analyse des argumentes utilisés par las élèves de classe de seconde. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 5/2, 187-215.

Maury, S. (1988). “Procédures dans la résolution de problèmes probabilistes”. *Actes du colloque de Sèvres*. Grenoble: Éditions La Pensée Sauvage.

Piaget, J., Inhelder, B. (1974). *La genèse de l’idée de hasard chez l’enfan*t. París: Presses Universitaires de France.

Sáenz, C. (1998). Sesgos en el razonamiento probabilístico y efectos de la instrucción estadística elemental. *Revista Suma* Nº 28, 37-52.

Tversky, A. y D., Kahneman, D. (1973), Availability: a heuristic for judging frequency and probability, *Cognitive Psychology*, 5, 207-232.

Tversky, A. y D., Kahneman, D. (1981). The framing of decisions and the psychology of choice, *Science*, 211, 453-458.